$$x + \frac{1}{2x} = 1$$

Warum finde ich keine Lösung für diese Gleichung?

Matherätsel der Woche...

Wer kann aufzeigen, warum eine Lösung, zumindest im üblichen Zahlenraum, eben nicht möglich ist?

→ Lösungsidee als pdf auf www.hpritz.ch

...Mathe eingerostet? Schulstoff auffrischen? Ziele erreichen?

Der Mathe-Coach

Obwohl die Gleichung auf den ersten Blick einfach auflösen zu sein scheint, ist keine Lösung im Zahlenbereich der reellen Zahlen, also aller von uns üblicherweise verwendeten Zahlen, möglich. Aus folgendem Grund:

Die Gleichung muss zuerst aufgelöst werden, dann stellen wir eine Gleichung der Form $ax^2 + bx + c = 0$ her und wenden wieder einmal die «Mitternachtsformel» an:

$$x + \frac{1}{2x} = 1 \qquad / \times 2x$$

$$2x^2 + 1 = 2x \qquad / - 2x$$

$$2x^2 - 2x + 1 = 0 \qquad / a = 2, b = -2, c = 1$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 2 \times 1}}{2 \times 2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{4}$$

Die Mitternachtsformel führt, wie man sieht, zu einer **negativen Zahl unter der Wurzel**. Eine Wurzel aus einer negativen Zahl lässt sich im Bereich der reellen Zahlen nicht ziehen, da umgekehrt x^2 immer eine positive Zahl ergeben muss!

Es existiert aber eine «ominöse» Variable « **i** » (**imaginäre Einheit**), die gemäss Definition folgende Eigenschaft hat: **$i^2 = -1$** und somit auch für unsere Gleichung eine Lösung ermöglichen würde...

Auf der nächsten Seite, was ChatGPT dazu weiss:

Das mathematische Symbol i heißt die **imaginäre Einheit**.

Sie ist definiert durch:

$$i^2 = -1$$

Mit dieser Definition erweitert man die reellen Zahlen zu den **komplexen Zahlen**. Jede komplexe Zahl hat die Form

$$z = a + bi$$

wobei a und b reelle Zahlen sind.

Historisch wurde i eingeführt, um Gleichungen wie

$$x^2 + 1 = 0$$

lösen zu können, denn in den reellen Zahlen gibt es keine Zahl, deren Quadrat -1 ergibt. In den komplexen Zahlen gilt dagegen:

$$x = \pm i.$$

Der Buchstabe i steht für „imaginär" (englisch *imaginary*). In einigen technischen Disziplinen, insbesondere der Elektrotechnik, verwendet man stattdessen häufig j, damit keine Verwechslung mit dem Symbol I für Strom entsteht.

<u>Die Lösung für unsere Gleichung wäre somit</u>:

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{4} = \frac{1}{2} \pm \frac{i}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$